Cours d'Analyse
Semestre 1

Stéphane Attal

Contents

Chapter 1

Calculs avec les nombres réels

1.1 Les ensembles usuels de nombres

On rappelle les notations usuelles pour les ensembles de nombres :
$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels positifs $\{0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{Z}$ est l'ensemble des entiers relatifs $\{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$,
$\mathbb{Q}$ est l'ensemble des rationnels, i.e. l'ensembles des fractions

$$\frac{a}{b},$$

avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.
Pour chacun de ces ensembles, l'ajout de $*$ signifie que l'on exclut 0 de l'ensemble : $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}^*$, $\mathbb{Q}^*$.
$\mathbb{Q}_+$ est l'ensemble des rationnels positifs.

L'ensemble $\mathbb{Q}$ est un ensemble déjà bien fourni de nombres. Par exemple, entre deux rationnels $q < p$ quelconques il y a une infinité de rationnels. En effet $p' = (p + q)/2$ est rationnel encore et vérifie $q < p' < p$. Ainsi de suite on peut en construire une infinité entre q et p.

Avec cette remarque, on voit qu'aucun rationnel $q \in \mathbb{Q}$ n'admet de "suivant" dans $\mathbb{Q}$. En effet, si on regarde l'ensemble

$$\mathcal{A} = \{p \in \mathbb{Q}\,;\ p > q\}$$

alors $\mathcal{A}$ n'a pas de plus petit élément. En effet, sinon cet élément p vérifie $q < p$ et on peut construire $q < p' < p$ et contredire le fait que p est le plus petit.

Une autre façon de dire la même chose : dans n'importe quel intervalle (rationnel) autour d'un rationnel q il y a une infinité de rationnels.

Et pourtant les rationnels sont loins d'être suffisants, la diagonale d'un carré de côté 1 mesure $\sqrt{2}$ qui n'est pas un rationnel. C'est un résultat qui avait déjà été remarqué en Grèce antique. Démontrons-le. Si $\sqrt{2}$ est un rationnel a/b, que l'on peut toujours supposer être sous forme réduite, i.e. sans diviseur commun. On a

$$\frac{a^2}{b^2} = 2$$

donc $a^2 = 2b^2$. Ainsi a^2 est pair, ce qui implique que a est pair (le carré d'un impair est impair). Donc $a = 2k$, ce qui donne $b^2 = 2k^2$ et b est pair aussi. Ce qui contredit l'hypothèse initiale de primalité entre a et b. Donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel. C'est d'ailleurs le cas de toutes les racines carrées qui ne sont pas des entiers (non démontré ici, exercice pour les plus motivés).

De toute évidence il faut plus que les rationnels. Ce qui, soit dit en passant, était une surprise il y a moins de 3000 ans. Il faut ce qu'on appelle le corps des nombres réels $\mathbb{R}$, que l'on connait bien intuitivement mais qui admet une vraie définition et une construction rigoureuse dont nous ne parlerons pas vraiment dans ce cours.

1.2 Manipulations d'inégalités

Un outil fondamental de l'analyse, que l'on utilise en permanence (et qui pose énormément de problèmes aux étudiants) c'est la manipulation d'inégalités. Revoyons quelques règles de base.

Sur $\mathbb{R}$ on a les inégalités usuelles de comparaison entre nombres : $\leq$, $\geq$, $<$, $>$. En fait il suffit de se concentrer sur une seule $\leq$, car les autres s'en déduisent facilement :

i) $x \geq y$ ssi $y \leq x$,

ii) $x < y$ ssi $x \leq y$ et $x \neq y$,

iii) $x > y$ ssi $y < x$.

Les propriétés fondamentales sont les suivantes :

Proposition 1.2.1 *Sur $\mathbb{R}$ la relation $\leq$ vérifie les deux propriétés suivantes*

1) Si $x \leq y$ et si $z \in \mathbb{R}$ alors $x + z \leq y + z$.

2) Si $x \leq y$ et si $z \geq 0$ alors $xz \leq yz$.

En fait ces propriétés ne se démontrent pas, elles sont axiomatiques de la construction des réels. Par contre les propriétés suivantes se déduisent maintenant facilement.

Proposition 1.2.2 *On a les propriétés suivantes.*

1) Si $x \leq y$ *alors* $-x \geq -y$*.*

2) Si $x \leq y$ *et* $z \leq 0$ *alors* $xz \geq yz$*.*

3) On a des propriétés analogues avec $<$*:*

$$x < y \Longrightarrow -x > -y$$
$$x < y \text{ et } z > 0 \Longrightarrow xz < yz \,...etc$$

Démonstration

$$1) \quad x \leq y \Longrightarrow x - x \leq y - x \Longrightarrow 0 \leq y - x \Longrightarrow -y \leq -x\,.$$

$$2) \quad -z \geq 0 \Longrightarrow (-z)x \leq (-z)y \Longrightarrow -zx \leq -zy \Longrightarrow zx \geq zy\,.$$

$$3) \quad x < y \text{ et } z > 0 \Longrightarrow xz \leq yz \text{ et } xz \neq yz \Longrightarrow xz < yz\,...$$

□

Proposition 1.2.3 *Si* $0 < x \leq y$ *ou si* $x \leq y < 0$ *alors*

$$\frac{1}{x} \geq \frac{1}{y}\,.$$

Démonstration En fait c'est juste la définition du fait que la fonction $x \mapsto 1/x$ est décroissante sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. Mais en essayant d'utiliser que ce qu'on a vu jusqu'à maintenant, c'est le raisonnement suivant. Si $0 < x \leq y$ on multiplie par $1/y$ de chaque côté : $x/y \leq 1$ puis par $1/x$ de chaque côté : $1/y \leq 1/x$.

Dans le cas négatif, c'est la même chose, sauf qu'on change deux fois le sens des inégalités. D'où le même résultat. □

Attention, ce résultat est faux pour $x \leq y$ quelconques, en fait pour $x < 0 < y$. En effet, on a $-2 < 2$ et pourtant $-1/2 < 1/2$.

On pourrait faire une liste sans fin d'utilisation des inégalités. Par exemple

Si $x \leq y$ et $a \leq b$ alors $x + a \leq y + b$. Par contre, on ne peut pas dire $ax \leq by$ (faire dem., trouver contre-exemple).

Ce qui compte c'est de bien les manipuler, de ne pas inventer des propriétés, de bien vérifier vos étapes de raisonnement.

1.3 Valeurs absolues, parties entières

On rappelle que pour $x \in \mathbb{R}$ on pose

$$|x| = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x & \text{si } x \leq 0\,. \end{cases}$$

Remarquez que dans tous les cas on a

$$x \leq |x| \qquad \text{et} \qquad -x \leq |x|\;.$$

Lemme 1.3.1 *On a*

$$|x| \leq M$$

si et seulement si

$$-M \leq x \leq M\,.$$

Démonstration Si $|x| \leq M$ alors $M \geq 0$ et

$$\begin{cases} x \leq M & \text{si } x \geq 0\,, \\ -x \leq M & \text{si } x < 0\,, \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} -M \leq x \leq M & \text{si } x \geq 0\,, \\ -M \leq x \leq M & \text{si } x < 0\,. \end{cases}$$

Inversement, si $-M \leq x \leq M$ alors $M \geq 0$ mais aussi $-M \leq -x \leq M$. D'où $|x| \leq M$ dans tous les cas. □

Une autre forme qui apparaît souvent est la suivante.

Lemme 1.3.2 *On a*

$$|x - a| \leq \varepsilon$$

si et seulement si

$$a - \varepsilon \leq x \leq a + \varepsilon\,.$$

La démonstration est laissée en exercice.

Proposition 1.3.3 (Inégalité triangulaire) *Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ on a*

$$||a| - |b|| \leq |a + b| \leq |a| + |b|\;.$$

Démonstration On a $|a+b| = a+b$ ou $-a-b$, qui sont tous deux $\leq |a|+|b|$. Ce qui prouve la première inégalité.

Ensuite, supposons que $|a| \geq |b|$ (sinon, on échange les rôles). Alors

$$||a|-|b|| = |a|-|b| = |a+b-b|-|b| \leq |a+b|+|b|-|b| = |a+b|\ .$$

□

Rappelons au passage quelques notations utiles :

$$x^+ = \max\{x,0\}, \quad x^- = \max\{-x,0\}\,.$$

Tous deux sont positifs et on a

$$\begin{cases} x = x^+ - x^-\ , \\ |x| = x^+ - x^-\ . \end{cases}$$

Nous finissons par un petit rappel sur les *parties entières.*

Théorème 1.3.4 *Pour tout $x \in \mathbb{R}$ il existe un unique $n \in \mathbb{Z}$ tel que*

$$n \leq x < n+1\,.$$

Ce n est noté $E[x]$, la partie entière *de x.*

Ce théorème est très intuitif et parait évident. En fait sa démonstration s'appuie sur des propriétés assez fines issues de la construction de $\mathbb{R}$, en particulier l'utilisation du sup et de l'inf (à venir).

1.4 Min et max

Soit A un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (i.e. $A \subset \mathbb{R}$). Un *majorant* de A est un élément $m \in \mathbb{R}$ tel que $a \leq m$ pour tout $a \in A$. Si le sous-ensemble A admet un majorant, ce qui n'est pas toujours le cas, on dit que A est *borné supérieurement*, ou que A est *majoré.* De même un *minorant* de A est un élément $n \in \mathbb{R}$ tel que $a \geq n$ pour tout $a \in A$. Si le sous-ensemble A admet un minorant, ce qui n'est pas toujours le cas, on dit que A est *borné inférieurement*, ou que A est *minoré.*

On dit que A admet un élément *maximal* s'il admet un majorant qui appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_0 \in A$ tel que $a \leq a_0$ pour tout $a \in A$. Un tel a_0 est forcement unique (exercice), on le note $\max A$. De même on dit que A admet un élément *minimal* s'il admet un minorant qui

appartient à A. Autrement dit s'il existe $a_1 \in A$ tel que $a \geq a_1$ pour tout $a \in A$. Un tel a_1 est forcement unique (exercice), on le note $\min A$.
Dans le cas $A =]-1, 1]$. Cet ensemble est majoré et minoré. On a $\max A = 1$, pas de min.
Dans le cas $A = [2, +\infty[$. Cet ensemble est minoré, mais pas majoré. On a pas de max, mais $\min A = 2$.
Pour le cas $A = \{q \in \mathbb{Q}\,;\; q^2 < 2\}$, cet ensemble est majoré mais pas minoré. Il n'a pas de max, pas de min.

1.5 Le corps des nombres réels

Théorème 1.5.1 ($\mathbb{R}$ est archimédien) *Soient $x, y \in \mathbb{R}$, avec $x > 0$. Alors il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $nx > y$.*

Evident dans le cadre d'une utilisation intuitive de $\mathbb{R}$, bien moins évident dans le cadre de la construction axiomatique de $\mathbb{R}$. Non démontré pour le moment.

Théorème 1.5.2 (Densité de $\mathbb{Q}$) *Pour tous $x < y \in \mathbb{R}$ il existe $q \in \mathbb{Q}$ tel que $x < q < y$.*

Démonstration On a $y - x > 0$, donc par le Théorème 1.5.1 il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$n(y - x) > 1\,.$$

De même, par le même théorème, il existe $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ tels que

$$-m_2 < nx < m_1$$

(n est fixé, on cherche m_1 tel que $m_1 \times 1 > nx$, on fait de même avec $-nx$). On en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que

$$m - 1 \leq nx < m\,,$$

en effet, on regarde $m = m_1 - 1$, si $nx < m$ on recommence, par contre si $m \leq x$ alors on a gagné.

Ainsi, on a

$$nx < m \leq nx + 1 < ny$$

d'où

$$x < \frac{m}{n} < y\,.$$

□

Chapter 2

Les suites réelles

2.1 Les suites, suites particulières

Une *suite réelle* est simplement une fonction de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Par contre, on la voit plutôt comme une famille $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ indexée par $\mathbb{N}$ que comme une fonction $n \mapsto u(n)$.

Une suite peut être définie comme une fonction explicite de n :

$$u_n = (-1)^n \cos\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{n}\right) ,$$

ou par récurrence :

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= 3u_n + 2\,, \\ u_{n+1} &= u_n^2 \\ v_{n+2} &= 3v_{n+1} - 5v_n\,, \\ &\dots \end{aligned}$$

Voyons maintenant quelques suites particulières.

Les *suites arithmétiques* sont définies par

$$u_{n+1} = u_n + r$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un $r \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors

$$\boxed{u_n = u_0 + nr\,.}$$

En association avec ces suites, notez la formule utile suivante

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}\,.}$$

Les *suites géométriques* sont définies par

$$u_{n+1} = q\, u_n$$

pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour un $q \in \mathbb{R}$ fixé. On a alors

$$\boxed{u_n = q^n\, u_0\,.}$$

Avec ces suites géométriques on a les formules bien connues suivantes

$$\boxed{\sum_{k=n_i}^{n_f} q^k = \frac{q^{n_i} - q^{n_f+1}}{1-q} = q^{n_i}\,\frac{1-q^N}{1-q}\,,}$$

où $N = n_f - n_i + 1$ est le nombre de termes de la somme.

Enfin on a un mix des deux avec les suites

$$u_{n+1} = a u_n + b$$

qui donnent

$$\boxed{u_n = a^n\, u_0 + b\,\frac{1-a^n}{1-a}\,.}$$

2.2 Résolution des suites $u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n$

Une situation très fréquente est de rencontrer des suites définies par récurrence de la forme

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\,,$$

où $a, b \in \mathbb{R}$ sont donnés et u_0, u_1 sont fixés. Le théorème qui suit donne la forme explicite de u_n dans ce cas.

Théorème 2.2.1 *Soient $a, b \in \mathbb{R}$ fixé et soit (u_n) la suite définie par récurrence*

$$u_{n+2} = a\, u_{n+1} + b\, u_n\,, \tag{2.1}$$

*pour tout $n \in \mathbb{N}$. On considère l'*équation caractéristique *de cette suite*

$$r^2 - ar - b = 0\,. \tag{2.2}$$

i) Si l'équation (2.2) admet deux solutions réelles distinctes r_1, r_2 alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n}\,,$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.
ii) Si l'équation (2.2) admet une seule solution réelle (double) r_0 alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n},$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.
iii) Si l'équation (2.2) admet deux solutions complexes conjuguées $r = \rho e^{i\theta}$ et $\bar{r}$ alors la suite (u_n) est de la forme

$$\boxed{u_n = \lambda\, \rho^n\, \cos(n\theta) + \mu\, \rho^n\, \sin(n\theta)},$$

pour des réels λ, μ qui sont fixés par u_0 et u_1.

Démonstration Commençons par le cas i). Si r_1, r_2 sont les deux racines distinctes de (2.2) alors il est facile de vérifier que la suite

$$u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$$

vérifie la relation (2.1) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \lambda\, r_1^n r_1^2 + \mu\, r_2^n r_2^2 \\ &= \lambda r_1^n (ar_1 + b) + \mu\, r_2^n (ar_2 + b) \\ &= a(\lambda r_1^{n+1} + \mu r_2^{n+1}) + b(\lambda r_1^n + \mu r_2^n) \\ &= au_{n+1} + bu_n\,. \end{aligned}$$

Il faut vérifier que cette solution est compatible avec le démarrage, i.e. avec u_0 et u_1 qui sont données. On remarque qu'il existe un unique couple $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ qui vérifie

$$u_0 = \lambda + \mu, \quad u_1 = \lambda\, r_1 + \mu\, r_2$$

car $r_1 \neq r_2$. Donc λ et μ sont ainsi fixées et la suite aussi. On a trouvé une solution $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à (2.1). Reste à montrer que c'est la seule. Mais, les suites solutions de (2.1) sont clairement entièrement déterminées par u_0 et u_1. Donc la suite

$$u_n = \lambda\, r_1^n + \mu\, r_2^n$$

est bien l'unique solution de (2.1) dans ce cas.

Le cas ii) se traite de la même façon : on vérifie que

$$u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n\,,$$

est solution dans ce cas (où l'on a en particulier $a = 2r_0$) :

$$\begin{aligned} u_{n+2} &= \lambda\, r_0^{n+2} + \mu\,(n+2)\, r_0^{n+2} \\ &= \lambda\, r_0^n(ar_0 + b) + \mu\, n\, r_0^n(ar_0 + b) + 2\mu\, r_0^{n+1} r_0 \\ &= a\lambda\, r_0^{n+1} + b\lambda\, r_0^n + a\mu\,(n+1)\, r_0^{n+1} - a\mu\, r_0^{n+1} + b\mu\, n\, r_0^n + \mu\, r_0^{n+1} a \\ &= au_{n+1} + bu_n\,. \end{aligned}$$

Toutes les solutions sont déterminées par u_0 et u_1. A chaque couple (u_0, u_1) correspond un unique couple (λ, μ) qui fait que

$$\boxed{u_n = \lambda\, r_0^n + \mu\, n\, r_0^n}\,,$$

est solution de (2.1) (exercice).

Pour le cas iii) il est plus facile de passer par les nombres complexes. On peut toujours trouver $z \in \mathbb{C}$ tel que

$$u_0 = z + \bar{z} \quad \text{et} \quad u_1 = zr + \bar{z}\bar{r}\,. \text{ (exercice)}$$

On en déduit que la suite

$$u_n = zr^n + \bar{z}\bar{r}^n$$

est solution de (2.1). Ce qui donne

$$zr^n + \bar{z}r^n = 2\mathrm{Re}(zr^n) = 2\mathrm{Re}(z)\,\rho^n\, \cos(n\theta) - 2\mathrm{Im}(z)\,\rho^n\, \sin(n\theta)\,.$$

□

2.3 Limites

Avant de commencer sur les limites, un petit exercice. Que peut-on dire de deux nombres réels a et b tels que $|a - b| \leq \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$?

Réponse : forcément $a = b$. En effet, si $a \neq b$ alors, posons $\varepsilon = |a - b|/2$. On a $\varepsilon > 0$ et donc par hypothèse on devrait avoir $|a - b| \leq \varepsilon$, ce qui n'est pas possible. Donc il ne reste que $a = b$.

Une petite application : que peut-on dire des nombres 1 et 0,9999999... ? Tout simplement : ce sont les mêmes nombres, ils sont égaux. En effet, la distance entre les deux nombres est plus petite que

$$1 - 0,999 = 0,001\,,$$

mais aussi plus petite que

$$1 - 0,9999999 = 0,0000001\,,$$

etc. On voit bien que la distance est plus petite que tout $\varepsilon > 0$. Donc en vertu de ce que l'on a démontré plus haut, ces deux nombres sont égaux. 1 et 0,9999999.... sont deux écritures différentes du même nombre.

Ce genre de considérations ammènent assez naturellement à la définition rigoureuse de limite. Comment exprimer mathématiquement que la suite $u_n = 1/n$ tend vers 0 ? En effet, on voit bien que quand n croit, les nombres $1/n$ se rapprochent de plus en plus de 0, mais sans jamais prendre la valeur 0. Et si on prend un exemple plus compliqué comme $u_n = cos(n)/n$, on voit la suite se rapprocher de 0 mais avec des oscillations plus hératiques. Comment caractériser cela ?

On dit qu'une suite (u_n) tend vers une limite l si les tous les termes de la suite deviennent aussi proches que l'on veut de l quand n devient assez grand.

Autrement dit, pour toute marge $\varepsilon > 0$ que l'on se donne à l'avance, la suite (u_n) est toute entière comprise, au delà d'un certain rang n_0 (qui dépend de ε), dans l'intervalle $[l - \varepsilon, l + \varepsilon]$.

Cela nous amène à la formulation officielle, qu'il faudra bien retenir car nous l'utiliserons sans arrêt. On dit, pour une suite (u_n), que sa limite est l quand n tend vers $+\infty$ si

pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|u_n - l| \leq \varepsilon$.

En termes plus condensés ça donne

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - l| \leq \varepsilon\,.$$

Dans ce cas on dit que la suite est *convergente*, qu'elle *converge* vers l. On écrit ça aussi

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = l\,,$$

ou parfois tout simplement

$$\lim u_n = l\,.$$

Revenons sur nos exemples et voyons comment montrer que la limite de nos deux suites est effectivement 0, avec cette définition. Commençons avec la suite $u_n = 1/n$. Soit $\varepsilon > 0$, si on veut que $|u_n - 0| \leq \varepsilon$, cela veut dire $1/n \leq \varepsilon$, ou encore $n \geq 1/\varepsilon$. Donc en prenant pour n_0 le premier entier supérieur à $1/\varepsilon$ on a montré que

$$\forall \varepsilon > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow |u_n - 0| \leq \varepsilon\,.$$

Donc $\lim u_n = 0$.

Regardons le deuxième exemple : $u_n = \cos(n)/n$. Pour montrez que la limite est 0, il faut trouver n_0 tel que pour tout $n \geq n_0$ on ait $|\cos(n)/n| \leq \varepsilon$. Comme $|\cos(n)| \leq 1$ pour tout n, on a

$$\left|\frac{\cos(n)}{n}\right| \leq \frac{1}{n}$$

donc comme précédement il suffit de prendre $n_0 \geq 1/\varepsilon$. On a montré que $\lim u_n = 0$.

Quand une suite ne converge pas vers une limite $l \in \mathbb{R}$, elle peut avoir deux comportements différents. Elle peut tendre vers $\pm\infty$ ou bien ne pas avoir de limite du tout. Par exemple la suite $u_n = (-1)^n$ n'a pas de limite.

Voici les définitions de $\lim u_n = +\infty$ et de $\lim u_n = -\infty$. L'idée est assez proche de celle de la limite finie. On dit que (u_n) tend vers $+\infty$, si elle devient toute entière plus grande que n'importe quel nombre $A > 0$ fixé à l'avance, pour peu qu'on attende un rang n_0 suffisamment grand:

$$\forall A > 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \geq A\,.$$

Pour la limite $-\infty$, la définition va de soit :

$$\forall A < 0\,,\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N}\,;\ n \geq n_0 \Rightarrow u_n \leq A\,.$$

Regardons à la main un exemple, la suite $u_n = n^2$. Elle tend vers $+\infty$. La preuve en est que si on prend n_0 un entier plus grand que $\sqrt{A}$, alors pour tout $n \geq n_0$ on aura

$$u_n = n^2 \geq n_0^2 \geq A\,.$$

Pour finir, un peu de vocabulaire : une suite (u_n) est
– *majorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
– *minorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \geq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$,
– *bornée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $|u_n| \leq M$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

On ne rappelle pas les définitions usuelles de suites *croissantes*, *décroissantes*, *monotones*.

Un résultat très important et utile.

Théorème 2.3.1 *Toute suite convergente est bornée.*

Démonstration Si $\lim u_n = l$ alors on sait que pour $\varepsilon > 0$ fixé, il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour tout $n \geq n_0$. Donc pour $n \geq n_0$ la suite est bornée :

$$|u_n| \leq |u_n - l| + |l| \leq \varepsilon + |l|\ .$$

Les termes u_n pour $n \leq n_0$ étant en nombre fini, ils admettent aussi une borne. La suite (u_n) est donc toute entière bornée. □

2.4 Propriétés des limites

Le premier résultat porte sur les opération élémentaires concernant les limites : addition, multiplication, etc.

Théorème 2.4.1 (Opérations sur les limites)
1) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $l, l' \in \mathbb{R}$ respectivement. Alors les suites $(u_n + v_n)$ et $(u_n v_n)$ convergent respectivement vers $l + l'$ et ll'. De plus, si (v_n) ne prend jamais la valeur 0 et si $l' \neq 0$ alors (u_n/v_n) converge vers l/l'.

2) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $l \in \mathbb{R}$ et $+\infty$ respectivement. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $+\infty$, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $+\infty$ si $l > 0$, vers $-\infty$ si $l < 0$ et est indéterminée si $l = 0$. Enfin, si (v_n) ne prend jamais la valeur 0 alors (u_n/v_n) converge vers 0.

3) Soient (u_n) et (v_n) deux suites ayant pour limite $+\infty$. Alors la suite $(u_n + v_n)$ converge vers $+\infty$, la suite $(u_n v_n)$ converge vers $+\infty$. La suite (u_n/v_n) a un comportement indéterminé.

Démonstration

1) Nous commençons par l'addition des limites. Si $\lim u_n = l$ et si $\lim v_n = l'$ alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon)$ et $n_0'(\varepsilon)$ dans $\mathbb{N}$ tels que pour $n \geq n_0(\varepsilon)$ on ait $|u_n - l| \leq \varepsilon$ et pour $n \geq n_0'(\varepsilon)$ on ait $|v_n - l'| \leq \varepsilon$. On a alors

$$|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \ .$$

Donc en prenant $n_0 = \max\{n_0(\varepsilon/2)\, ,\, n_0'(\varepsilon/2)\}$, on voit que pour tout $n \geq n_0$ on a

$$|u_n + v_n - (l + l')| \leq |u_n - l| + |v_n - l'| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\,.$$

Ce qui démontre la convergence voulue.

Nous démontrons maintenant le produit des limites. On garde les mêmes notations que ci-dessus. Par le Théorème 2.3.1, la suite (v_n) est bornée par une borne M'. On a

$$\begin{aligned}|u_n v_n - ll'| &\leq |u_n v_n - l v_n| + |l v_n - ll'| \\ &\leq M' \,|u_n - l| + |l|\, |v_n - l'| \ .\end{aligned}$$

Prenons, par exemple

$$n_0 = \max\{n_0\left(\varepsilon/(2M')\right), n_0'\left(\varepsilon/(2\,|l|)\right) \ .$$

Pour $n \geq n_0$ on a donc

$$M' |u_n - l| \leq \varepsilon/2 \quad \text{et} \quad |l| |v_n - l'| \leq \varepsilon/2$$

et donc pour $n \geq 0$ on a $|u_n v_n - ll'| \leq \varepsilon$. Ce qui prouve la convergence annoncée.

Il reste à démontrer le quotient des limites. Pour cela il suffit de montrer simplement que $\lim 1/v_n = 1/l'$, car après il ne reste plus qu'à appliquer la règle pour le produit.

Calculons un peu :

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \right| = \left| \frac{v_n - l'}{v_n \, l'} \right| .$$

Comme la suite (v_n) tend vers $l' \neq 0$, il existe m_0 tel que pour tout $n \geq m_0$ on ait $|v_n| \geq |l'|/2$. Le reste de la suite $|v_0|, |v_1|, \ldots, |v_{m_0-1}|$ est finie et tous les termes sont strictement positifs, donc c'est minoré par un $m > 0$. En conclusion, il existe un $M > 0$ tel que $|v_n| \geq M$ pour tout n. Ce qui donne là-haut :

$$\left| \frac{1}{v_n} - \frac{1}{l'} \right| = \left| \frac{v_n - l'}{v_n \, l'} \right| \leq \frac{1}{M\ |l'|} |v_n - l'| .$$

Ensuite il est facile de conclure comme on l'a déjà fait deux fois ci-dessus.

2) Si $\lim u_n = l$ et $\lim v_n = +\infty$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0(\varepsilon)$ tel que $|u_n - l| \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$. En particulier, dans ce cas on a $u_n \geq l - \varepsilon$. Soit $A > 0$ fixé et soit $A' = A - l + \varepsilon$. Il existe un n_0' tel que pour $n \geq n_0'$ on ait $v_n \geq A'$.

Si on pose $n_0 = \max\{n_0(\varepsilon), n_0'\}$ alors pour $n \geq n_0$ on a

$$v_n + u_n \geq A' + l - \varepsilon = A .$$

On a démontré la convergence vers $+\infty$.

Quant à la suite $(u_n v_n)$, si la limite l est strictement positive, prenons $0 < \varepsilon < l/2$, on a pour n suffisamment grand

$$u_n v_n \geq (l - \varepsilon) A$$

et la conclusion suit facilement. Le cas $l < 0$ se fait de manière analogue.

Montrons que $(1/v_n)$ tend vers 0. Soit $\varepsilon > 0$ et soit $A = 1/\varepsilon > 0$. On sait qu'il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait $v_n \geq A$. On a donc $0 < 1/v_n \leq 1/A = \varepsilon$. Cela démontre la convergence voulue.

3) Faisons ça un peu plus rapidement, pour n assez grand on a

$$u_n + v_n \geq \frac{A}{2} + \frac{A}{2} = A .$$

D'où la première propriété. De même, pour n assez grand on a

$$u_n v_n \geq \sqrt{A}\,\sqrt{A} = A\,.$$

D'où la seconde propriété.

Enfin, pour terminer, voyons, à travers des exemples, que les cas dits "indéterminés" peuvent effectivement donner lieu à tous les scénarios.

Tout d'abord la situation "$0 \times \infty$", qui vaut aussi pour "∞/∞". Soit $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^*$ et $\gamma \in \mathbb{R}$. La suite $u_n = 1/n^\alpha$ tend vers 0, la suite $v_n = n^\beta + \gamma$ tend vers $+\infty$. Le produit $u_n v_n$ tend vers 0 si $\alpha > \beta$, vers $+\infty$ si $\alpha < \beta$ et vers $\gamma \in \mathbb{R}$ si $\alpha = \beta$. On peut donc avoir toutes les limites possibles.

On peut même ne pas avoir de limite du tout : $v_n = (2 + (-1)^n)n$ tend vers $+\infty$, la suite $u_n = 1/n$ tend vers 0 et pourtant la suite $u_n v_n = 2 + (-1)^n$ n'a pas de limite.

Voyons maintenant les cas de type "$(+\infty) + (-\infty)$", ou "$(+\infty) - (+\infty)$". Si on prend $u_n = n^\alpha$ et $v_n = n^\beta + \gamma$, elles tendent toutes les deux vers $+\infty$. Pourtant $v_n - u_n$ tend vers $+\infty$ si $\beta > \alpha$, tend vers $-\infty$ si $\beta < \alpha$ et vers γ si $\alpha = \beta$. Enfin, en prenant $u_n = n + (-1)^n$ et $v_n = n$ on a un exemple où $u_n - v_n$ n'a pas de limite. □

Le théorème suivant est souvent très utile pour montrer qu'une suite a une limite donnée.

Théorème 2.4.2 (Théorème des gendarmes) *Soient* (u_n), (v_n) *et* (w_n) *3 suites réelles.*

1) Si les suites (u_n) *et* (w_n) *ont la même limite* $l \in \mathbb{R}$, *et si on a*

$$u_n \leq v_n \leq w_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = l$.

2) Si (u_n) *a pour limite* $+\infty$ *et si*

$$u_n \leq v_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = +\infty$.

3) Si (w_n) *a pour limite* $-\infty$ *et si*

$$v_n \leq w_n$$

(au moins à partir d'un certain rang), alors $\lim v_n = -\infty$.

Démonstration Faisons le cas 1) en détails, les autres cas sont laissés comme exercices.

Soit $\varepsilon > 0$, il existe n_0 tel que pour $n \geq n_0$ on ait :

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \, , \\ |u_n - l| \leq \varepsilon \, , \\ |w_n - l| \leq \varepsilon \, . \end{cases}$$

En particulier on a

$$\begin{cases} u_n \leq v_n \leq w_n \, , \\ l - \varepsilon \leq u_n \, , \\ w_n \leq l + \varepsilon \, . \end{cases}$$

Ce qui donne

$$l - \varepsilon \leq v_n \leq l + e \quad \Longleftrightarrow \quad |v_n - l| \leq \varepsilon \, .$$

□

Enfin nous terminons sur un théorème très important d'existence de limite.

Théorème 2.4.3 *Toute suite monotone admet une limite. Plus précisement:*
1) Toute suite croissante majorée admet une limite finie

$$l = \sup\{u_n \, ; \; n \in \mathbb{N}\} \, .$$

2) Toute suite croissante non majorée tend vers $+\infty$.
3) Toute suite décroissante minorée admet une limite finie

$$l = \inf\{u_n \, ; \; n \in \mathbb{N}\} \, .$$

4) Toute suite décroissante non minorée tend vers $-\infty$.

Ce théorème n'est pas démontré pour le moment.

Théorème 2.4.4 (Suites adjacentes) *Si (u_n) et (v_n) sont deux suites, l'une croissante et l'autre décroissante, telles que $u_n \leq v_n$ (au moins à partir d'un certain rang). Si $\lim v_n - u_n = 0$ alors (u_n) et (v_n) sont convergentes et ont même limite finie.*

Démonstration On a $u_n \leq v_n$, mais comme (v_n) est décroissante, on a $u_n \leq v_0$. Et cela est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donc la suite (u_n) est majorée. Par le Théorème 2.4.3 elle admet une limite $l \in \mathbb{R}$.

Avec le même genre de raisonnement (v_n) est décroissante minorée donc convergente vers un l'. Mais si on veut que $\lim u_n - v_n = 0$ il faut que $l = l'$.
□

2.5 Densité des rationnels

Revenons maintenant sur la densité de $\mathbb{Q}$ dans $\mathbb{R}$.

Théorème 2.5.1 *Pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe une suite $(q_n) \subset \mathbb{Q}$ telle que $\lim q_n = r$.*

Démonstration On utilise le Théorème 1.5.2 : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $q_n \in \mathbb{Q}$ tel que $q_n \in]r, r+1/n[$. Cette suite (q_n) vérifie les propriétés annoncées (en utilisant le théorème des gendarmes). □

Dans le théorème ci-dessus on voit bien qu'il y a plein de suites de rationnels qui convergent vers r et que de plus la démonstration du théorème ci-dessus ne donne pas de procédé constructif pour construire une telle suite. Nous allons maintenant passer un peu sur une approximation rationnelle très importante : le développement décimal.

Théorème 2.5.2 *Pour tout $r \in \mathbb{R}$ il existe une suite unique (m_n) tels que :*
– *$m_0 \in \mathbb{Z}$ et pour pour $n \geq 1$ on ait $m_n \in \{0, 1, \ldots, 9\}$,*
– *la suite (m_n) ne termine pas par une suite infinie de 9,*
– *on ait*

$$r = \lim_{n\to+\infty} m_0 + \sum_{k=1}^{n} m_k\, 10^{-k}\,.$$

Démonstration On pose $m_0 = [r]$ et $r_1 = r - m_0$. On a alors $r_1 \in [0, 1[$ et donc $10r_1 \in [0, 10[$. Soit $m_1 = [10r_1]$, on a donc bien $m_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. On pose $r_2 = 10r_1 - m_1 \in [0, 1[$. Notez qu'on a

$$r = m_0 + \frac{m_1}{10} + \frac{r_2}{10}\,.$$

Et ainsi de suite, on construit par récurrence, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, une famille $(m_n)_{1\leq n\leq N}$ dans $\{0, 1, \ldots, 9\}$ telle que

$$r = m_0 + \sum_{k=1}^{N} m_k\, 10^{-k} + \frac{r_{N+1}}{10^N}$$

avec $r_{N+1} \in [0, 1[$. Si on pose $q_N = m_0 + \sum_{k=1}^{N} m_k\, 10^{-k}$, on a alors $|r - q_N| \leq 10^{-N}$ et donc $\lim q_N = r$. On a démontré l'existence de la suite vérifiant la troisième propriété.

Pour le moment rien n'empêche cette suite de terminer par une infinité de 9. Mais notez que si

$$x = 0,00\ldots009999999\ldots = 10^{-N_0} \times 0,9999999\ldots$$

alors, comme nous l'avons montré en début de chapitre, on a aussi

$$x = 10^{-N_0} \times 1 = 10^{-N_0} = 0,00\ldots 01\,.$$

On conclut facilement.

Il reste à montrer l'unicité. Admettons que l'on ait deux telles suites (m_n) et (p_n). On a en particulier

$$[r] = m_0 = p_0\,.$$

Ensuite

$$[10(r - m_0)] = m_1 = p_1\,.$$

Et ainsi de suite, on conclut facilement par récurrence. □

L'unique suite associée à $r \in \mathbb{R}$ qui vérifie les propriétés ci-dessus est appelée *développement décimal de* r.

On connaît tous au moins une partie du développement décimal de π :

$$\pi = 3,14159265358979323846264338327950288\ldots$$

qui ne s'arrête pas. On connaît aujourd'hui des milliards de décimales de π.

Mais comment reconnaître dans un développement décimal qu'un nombre est rationnel ou irrationnel ? C'est une propriété très remarquable du développement décimal que l'on puisse faire la différence. On dit qu'un développement décimal (m_n) associé à r est *périodique à partir d'un certain rang* si au delà d'un rang $n_0 \in \mathbb{N}$ la suite (m_n) est périodique, y compris le cas d'un développement fini (on considère qu'il y a une suite de 0 pour finir.

Théorème 2.5.3 *Soit $r \in \mathbb{R}$ de développement décimal (m_n). Alors r est rationnel si et seulement si (m_n) est périodique à partir d'un certain rang.*

Démonstration Tout d'abord montrons que tout nombre rationnel a son développement décimal qui est périodique. Soit $r = p/q$ un rationnel, que l'on peut supposer appartenant à $[0, 1[$, après lui avoir retiré sa partie entière. Si on regarde la construction de la suite (m_n) correspondant à son développement décimal, on voit que cela correspond à effectuer la division euclidienne de p par q. En effet, multiplier par 10 correspond à "abaisser le 0", ensuite comme $p < q$ la division de $10p$ par q donne un diviseur appartenant à $\{0, 1, \ldots, 9\}$ et un reste appartenant à $\{0, 1, \ldots q - 1\}$. Et ainsi de suite.

Deux scénarios sont alors possibles : soit le reste est à un moment 0, la division s'arrête et elle est donc périodique, soit elle ne finit pas. Mais

comme les différents restes appartiennent à un ensemble fini $\{0, 1, \ldots q-1\}$, forcement à un moment la suite des reste repasse par la même valeur. Alors la division euclidienne donnera le même diviseur, le même reste etc. La suite devient périodique. Faites par exemple la division à la main de 1 par 7.

Nous montrons maintenant pour conclure que tout réel r dont le développement décimal est périodique à partir d'un certain rang est forcément un rationnel. Un tel réel s'écrit comme un rationnel $m_0, m_1\, m_2 \ldots m_{n_0}$ plus la partie périodique :

$$s = 0, 00\ldots 00\, p_1\, p_2 \ldots p_K\, p_1\, p_2 \ldots p_K \ldots$$

On a

$$\begin{aligned} 10^{n_0} s &= 0, p_1\, p_2 \ldots p_K\, p_1\, p_2 \ldots p_K \ldots \\ 10^{n_0+K} s &= p_1\, p_2 \ldots p_K, p_1\, p_2 \ldots p_K \ldots \\ 10^{n_0+K} s - p_1\, p_2 \ldots p_K &= 0, p_1\, p_2 \ldots p_K\, p_1\, p_2 \ldots p_K \ldots \\ 10^{n_0+K} s - p_1\, p_2 \ldots p_K &= 10^{n_0} s\,. \end{aligned}$$

Ainsi s est rationnel. □

Remarque : Il est important de noter que tout ce que nous avons fait ici avec le développement en base 10 peut se faire de même avec n'importe quelle autre base. En particulier il y a une autre base qui est vraiment importante parfois, c'est la base 2. On parle alors de *décomposition dyadique* des réels.

Chapter 3

Fonctions d'une variable réelle

3.1 Définitions de base, terminologie

Une *fonction réelle* est une application f d'un ensemble $D \subset \mathbb{R}$ dans un ensemble $A \subset \mathbb{R}$. C'est à dire qu'à tout élément $x \in D$ la fonction f associe une valeur $f(x) \in A$. On note ça :

$$\begin{array}{rcccc} f & : & D & \longrightarrow & A \\ & & x & \longmapsto & f(x)\,. \end{array}$$

On note f la fonction et $f(x)$ sa valeur au point x. Pour parler d'une fonction précise on peut par exemple parler de la fonction $x \mapsto x^2$.

Pour un $x \in D$, la valeur $y = f(x) \in A$ est l'*image* de x par f. Inversement x est l'*antécédent* de y.

L'ensemble D est le *domaine* de f, c'est l'ensemble des points où la fonction est bien définie. On le note souvent $\mathrm{Dom}\ f$.

L'ensemble

$$\{f(x)\,;\ x \in D\}$$

est l'*image* de f, on le note $\mathrm{Im}\ f$ ou $\mathrm{Ran}\ f$.

Plus généralement, pour tout ensemble $E \subset \mathrm{Dom}\ f$ on note

$$f(E) = \{f(x)\,;\ x \in E\}\,.$$

Pour tout ensemble $F \subset \mathrm{Im}\ f$ on note

$$f^{-1}(F) = \{x \in \mathrm{Dom}\ f\,;\ f(x) \in F\}\,.$$

Enfin, le *graphe* de f est l'ensemble

$$\Gamma_f = \{(x, f(x))\,;\ x \in \mathrm{Dom}\ f\}\,.$$

Une fonction f est dite *injective* si pour tout $x \neq y \in \mathrm{Dom}\, f$ on a $f(x) \neq f(y)$. Cela veut dire en particulier que tout $y \in \mathrm{Ran}\, f$ a un unique antécédent.

Une fonction f est dite *surjective sur* $A \subset \mathbb{R}$ si pour tout $y \in A$ il existe $x \in \mathrm{Dom}\, f$ tel que $f(x) = y$. Autrement dit, si tout élément de A admet un antécédent.

Une fonction $f\ : D \to A$ est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective. Dans ce cas, pour tout $y \in A$ il existe un unique $x \in D$ tel que $f(x) = y$. Cet unique x associé à y est noté $f^{-1}(y)$. On définit ainsi une nouvelle fonction

$$\begin{array}{rcccc} f^{-1} & : & A & \longrightarrow & D \\ & & y & \longmapsto & f^{-1}(x)\,. \end{array}$$

Notez bien la relation importante

$$x = f^{-1}(y) \iff f(x) = y\,.$$

La fonction f^{-1} est la *fonction réciproque* de f.

Notez que f^{-1} est alors aussi bijective (exercice) et que $(f^{-1})^{-1} = f$ (exercice).

Proposition 3.1.1 *Si f est bijective alors le graphe de f^{-1} est le symétrique du graphe de f par rapport à la droite $(y = x)$.*

Démonstration Soit (a, b) un point de Γ_f, alors cela veut dire qu'il existe $x \in \mathrm{Dom}\, f$ tel que $a = x$ et $b = f(x)$. Le symétrique de ce point par rapport à $(y = x)$ est le point (b, a), c'est à dire $(b, f^{-1}(b))$. C'est donc bien un point de $\Gamma_{f^{-1}}$. Ainsi le symétrique de Γ_f est inclus dans $\Gamma_{f^{-1}}$.

Avec un raisonnement en tout point similaire on voit que le symétrique de $\Gamma_{f^{-1}}$ est inclus dans Γ_f. On conclut facilement. □

Soient f et g deux fonctions réelles telles que $\mathrm{Im}\, f \subset \mathrm{Dom}\, g$. On peut alors définir la fonction *composée*

$$\begin{array}{rcccc} g \circ f & : & \mathrm{Dom}\, f & \longrightarrow & \mathrm{Im}\, g \\ & & x & \longmapsto & g(f(x))\,. \end{array}$$

Notez que, si f est bijective alors $f^{-1} \circ f(x) = x$ pour tout $x \in \mathrm{Dom}\, f$ et que $f \circ f^{-1}(y) = y$ pour tout $y \in \mathrm{Ran}\, f$.

On dit qu'une fonction $f\ :\ D \to A$ est *croissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) \leq f(y)$. Elle est *strictement croissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) < f(y)$.

On dit qu'une fonction $f : D \to A$ est *décroissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) \geq f(y)$. Elle est *strictement décroissante* si pour tout $x < y \in D$ on $f(x) > f(y)$.

Dans tous les cas on dit que f est *monotone*, resp. *strictement monotone*.

Vous noterez qu'une fonction strictement monotone est injective. Le contraire n'est pas vrai, je vous laisse trouver tout seul un contre exemple.

Une fonction f est *majorée* si il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \leq M$ pour tout $x \in \text{Dom } f$. Elle est *minorée* s'il existe $m \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \geq m$ pour tout $x \in \text{Dom } f$. Elle est *bornée* si elle est à la fois majorée et minorée.

3.2 Actions sur les graphes

Avant de voir une liste de fonctions usuelles, il est important de se rappeler l'effet sur le graphe de f de certaines transformations élémentaires. On part d'une fonction f quelconque.

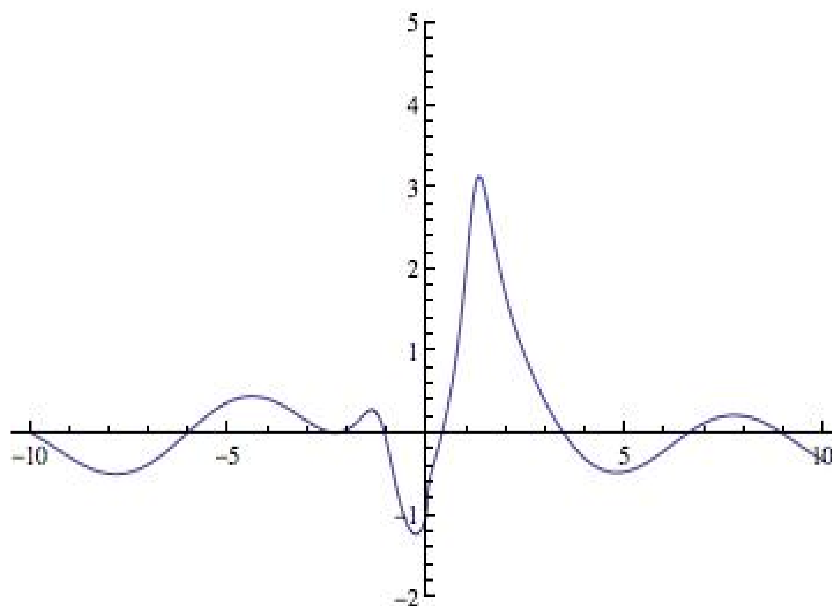


Figure 3.1: $f(x)$

qui restera en bleu dans les autres graphiques.

1er cas : $g(x) = f(a + x)$

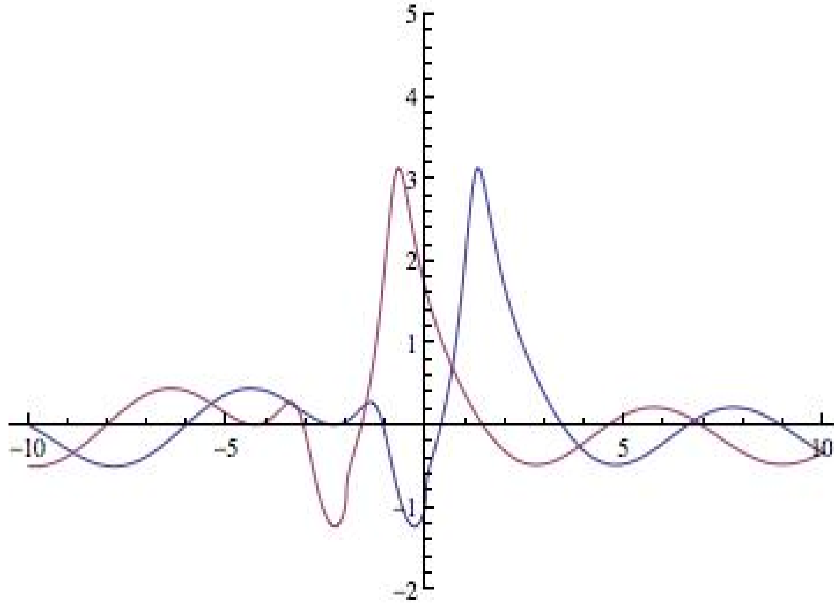


Figure 3.2: $f(a + x)$, avec $a > 0$

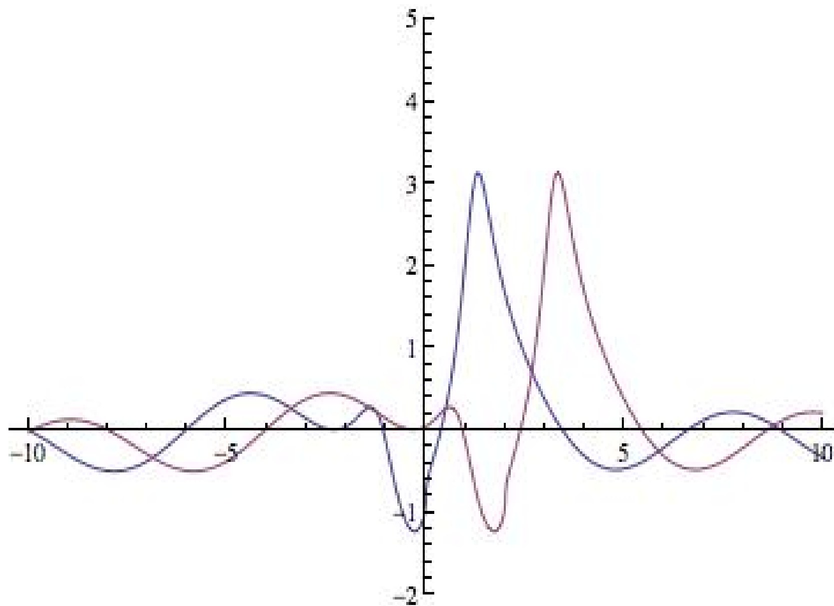


Figure 3.3: $f(a + x)$, avec $a < 0$

2ème cas : $g(x) = f(x) + a$

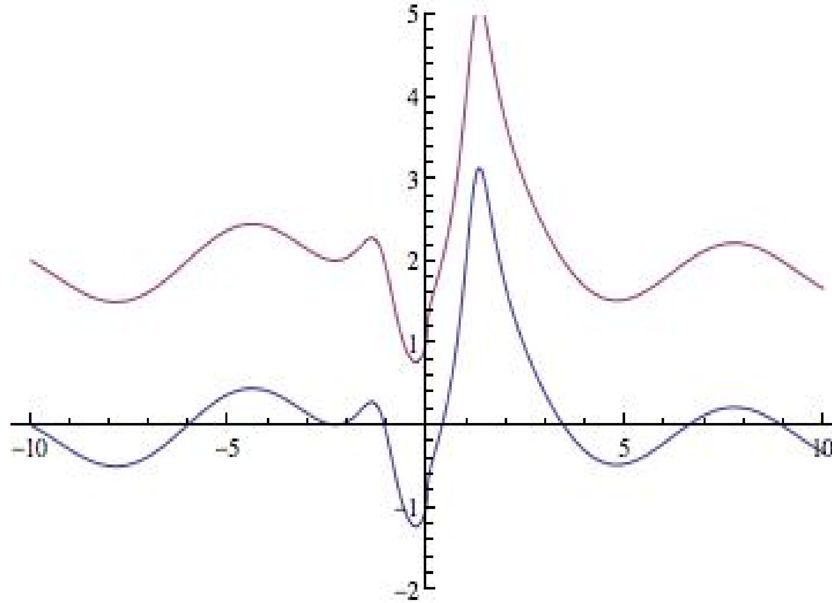


Figure 3.4: $f(x) + a$, avec $a > 0$

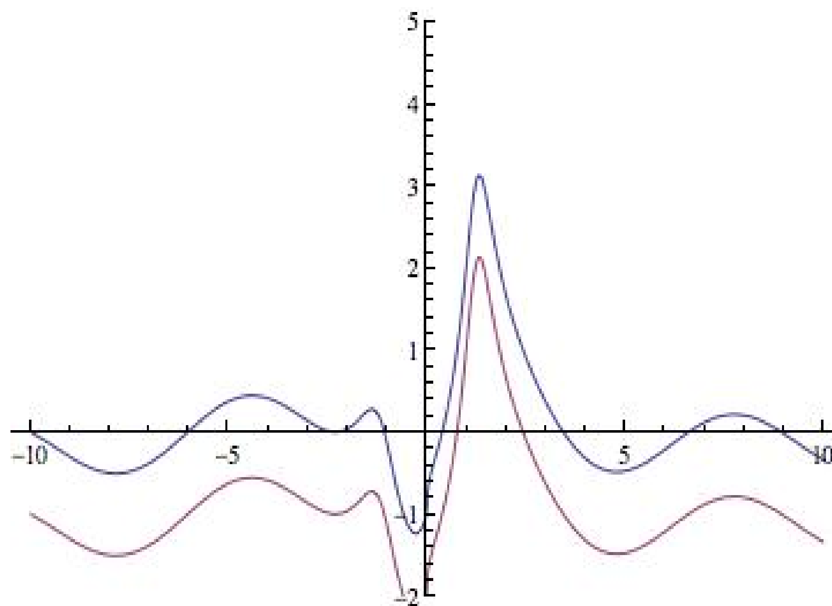


Figure 3.5: $f(x) + a$, avec $a < 0$

3ème cas : $g(x) = f(-x)$

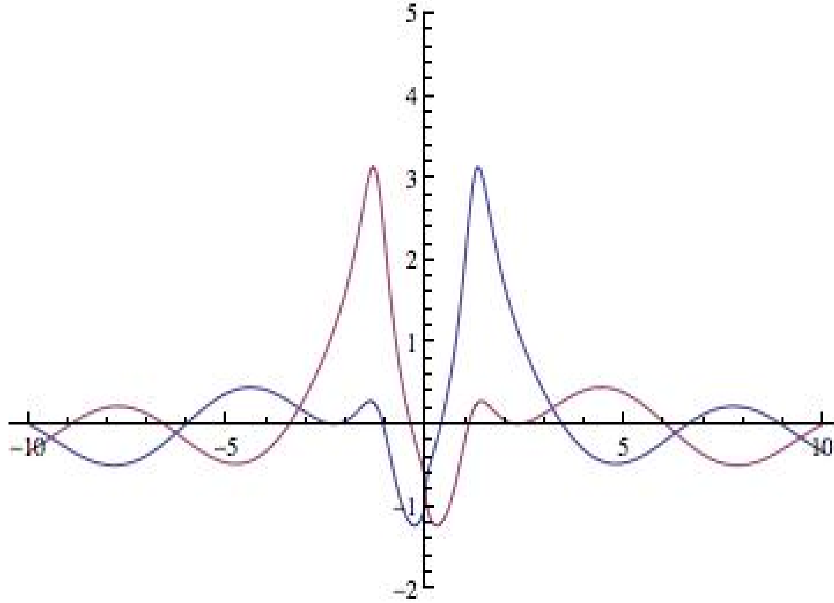


Figure 3.6: $f(-x)$

et du coup $g(x) = f(a-x)$ en combinant les 2 cas :

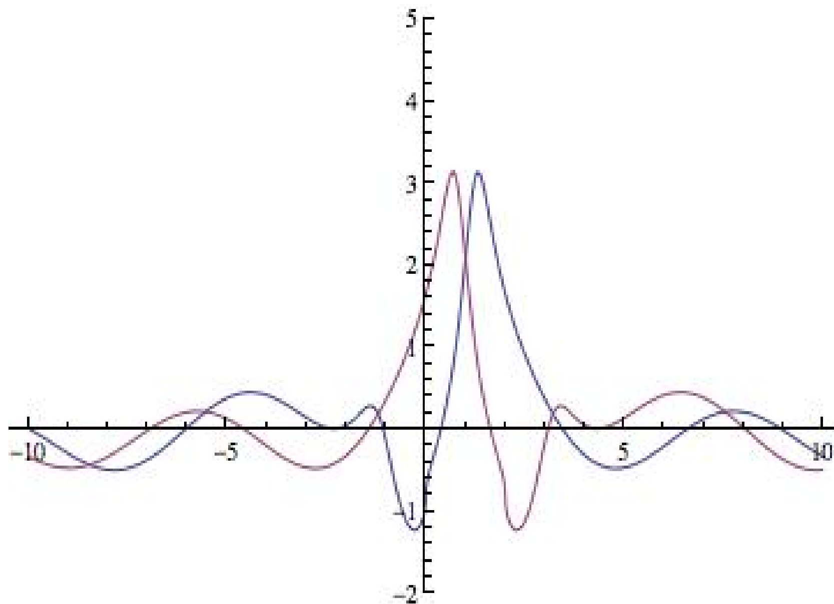


Figure 3.7: $f(a-x)$, avec $a > 0$

4ème cas : $g(x) = f(ax)$

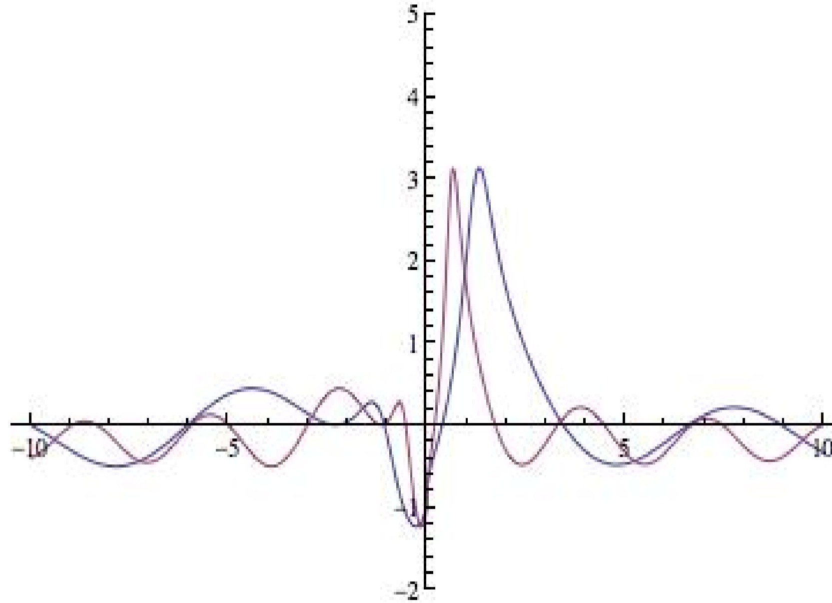


Figure 3.8: $f(ax)$, avec $a > 1$

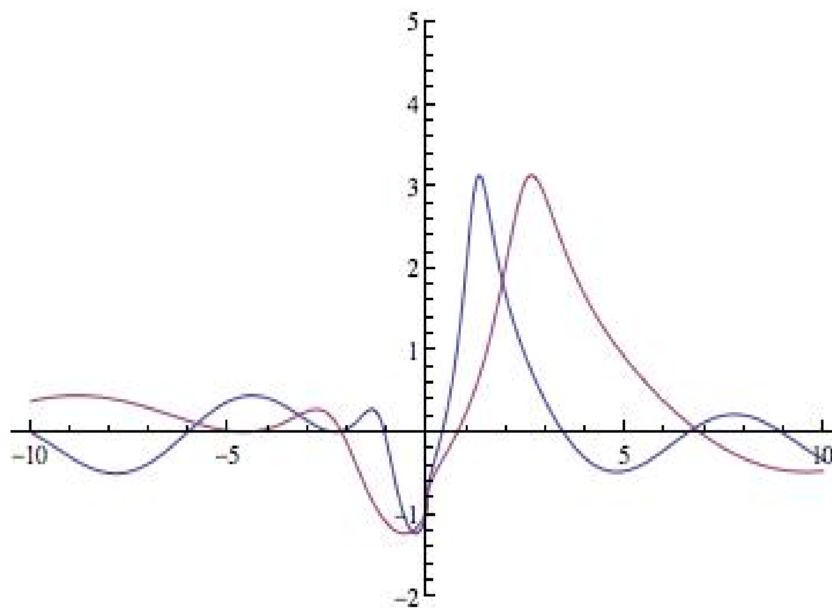


Figure 3.9: $f(ax)$, avec $0 < a < 1$

5ème cas : $g(x) = af(x)$

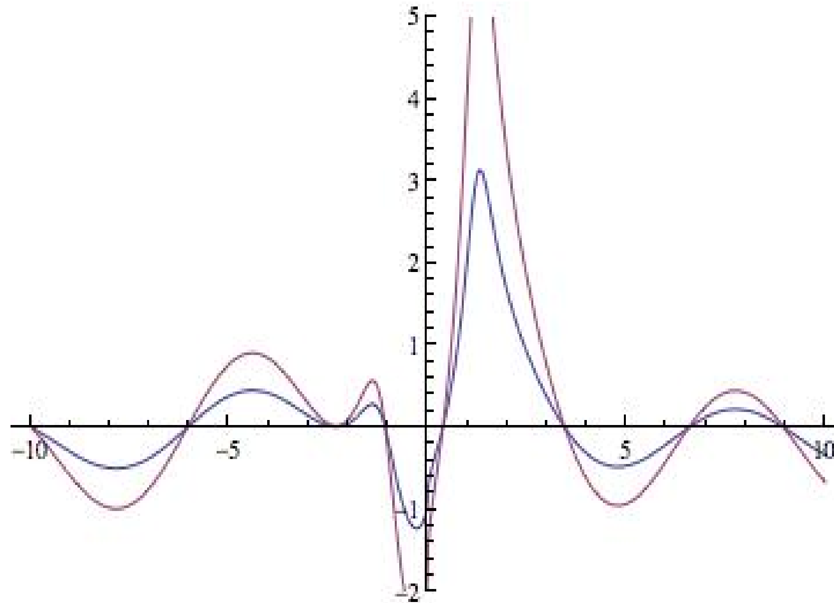


Figure 3.10: $af(x)$, avec $a > 1$

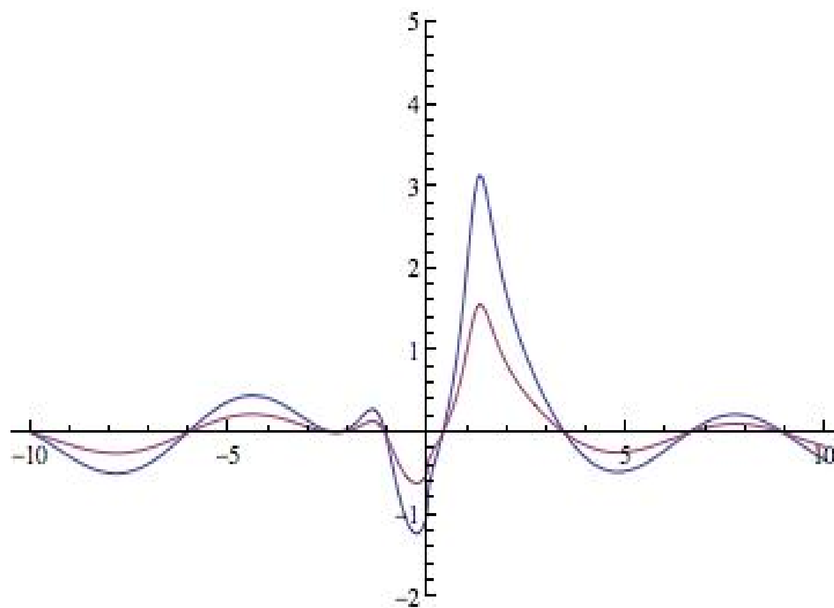


Figure 3.11: $af(x)$, avec $0 < a < 1$

6ème cas : $g(x) = -f(x)$

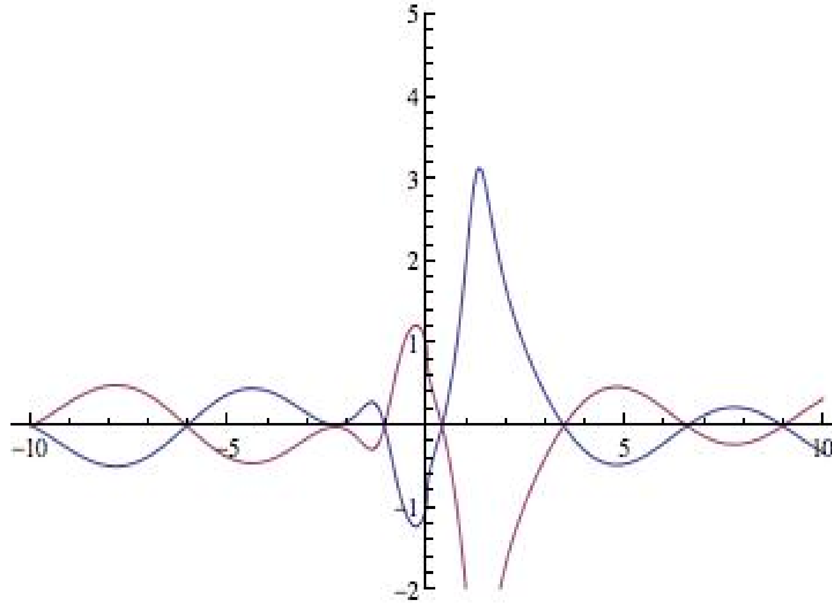


Figure 3.12: $-f(x)$, avec $a > 1$

3.3 Fonctions puissances

On va définir les fonctions puissances, i.e. $x \mapsto x^\alpha$ pour n'importe quelle puissance réelle α. Vous connaissez certainement les puissances entières et leurs propriétés, l'exponentielle et le logarithme. Voici quelques rappels.

Tout d'abord les puissances entières : $f(x) = x^n$, pour un $x \in \mathbb{N}$. Fonctions définies sur $\mathbb{R}$.

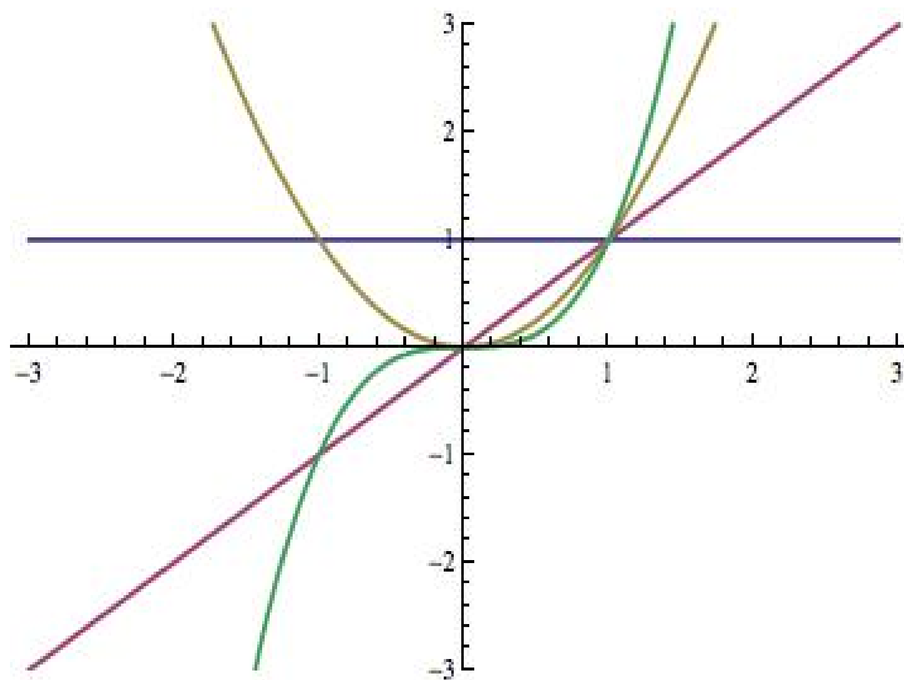


Figure 3.13: $f(x) = x^0$, $f(x) = x^1$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$

Notez les propriétés importantes suivantes qui se démontrent facilement (exercice).

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ 1^n &= 1 \\ x^{n+m} &= x^n\, x^m \\ x^{nm} &= (x^n)^m\,. \end{aligned}$$

En lien avec exponentielle et logarithme, on rappelle les choses suivantes. Les fonctions *exponentielle* et *logarithme*.

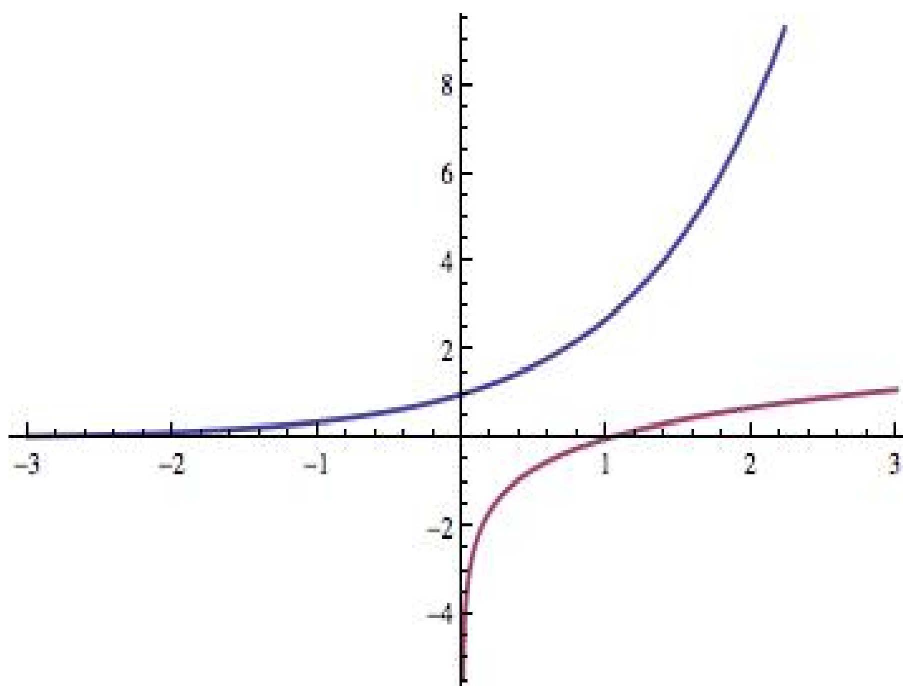


Figure 3.14: $f(x) = e^x$, $f(x) = \ln(x)$

Ainsi que les propriétés élémentaires

$$\begin{aligned}
&e^x = y \Leftrightarrow x = \ln y \\
&\ln(e^x) = x \\
&e^{\ln(x)} = x \\
&e^{x+y} = e^x e^y \\
&(e^x)^n = e^{nx} \\
&\ln(xy) = \ln(x) + \ln(y) \\
&\ln(x^n) = n\ln(x) \\
&x^n = e^{n\ln(x)}\,.
\end{aligned}$$

Le principe de base dans les définitions et les notations des autres fonctions puissances c'est qu'on garde toutes les propriétés ci-dessus vraies pour toutes les autres puissances.

Par exemple,

$$x^{-n}x^n = x^{-n+n} = x^0 = 1\,,$$

donc

$$x^{-n} = \frac{1}{x^n}\,.$$

On a ainsi les puissances entières négatives, inverses de puissances entières : $f(x) = x^{-n}$, pour un $n \in \mathbb{N}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}^*$.

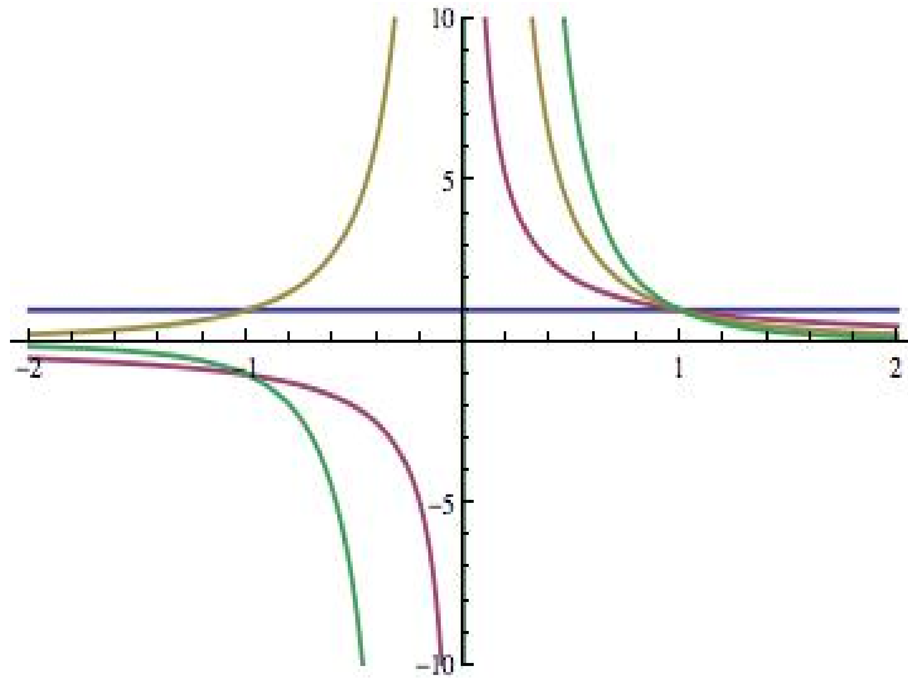


Figure 3.15: $f(x) = 1/x^0$, $f(x) = 1/x^1$, $f(x) = 1/x^2$, $f(x) = 1/x^3$

Ensuite les puissances de type $1/n$. Soit $x \geq 0$, posons $y = x^{1/n}$. On a

$$y^n = \left(x^{1/n}\right)^n = x^{n/n} = x^1 = x\,.$$

Ainsi y vérifie $y^n = x$, c'est ce qu'on appelle la *racine n-ième* de x. Le cas $n = 2$ est la racine carrée usuelle.

Les fonctions racines n-ièmes : $f(x) = x^{1/n}$. Elles sont définies sur $\mathbb{R}^+$.

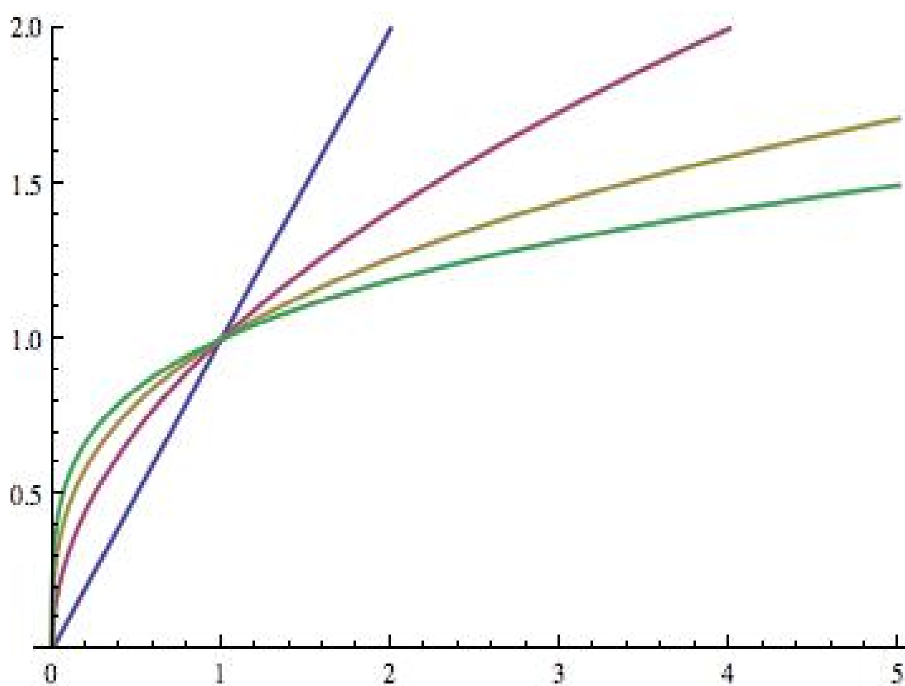


Figure 3.16: $f(x) = x^{1/1}$, $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{1/3}$, $f(x) = x^{1/4}$

Notez que quand n est impair, on peut définir $x^{1/n}$ sur tout $\mathbb{R}$ en posant

$$x^{1/n} = -(-x)^{1/n}\,.$$

C'est encore l'unique réel y tel que $y^n = x$. Lorsque n est pair il n'y a pas de telle extension.

La combinaison de toutes ces fonctions puissances permet de définir les *fonction puissances rationnelles*. En effet, soit $q \in \mathbb{Q}$, de la forme $q = a/b$, $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{N}^*$, alors pour tout $x > 0$ on pose, en respectant les règles annoncées :

$$x^q = x^{a/b} = (x^{1/b})^a = (x^a)^{1/b}\,.$$

Les fonctions puissances rationnelles sont donc définies sur $\mathbb{R}_+^*$.

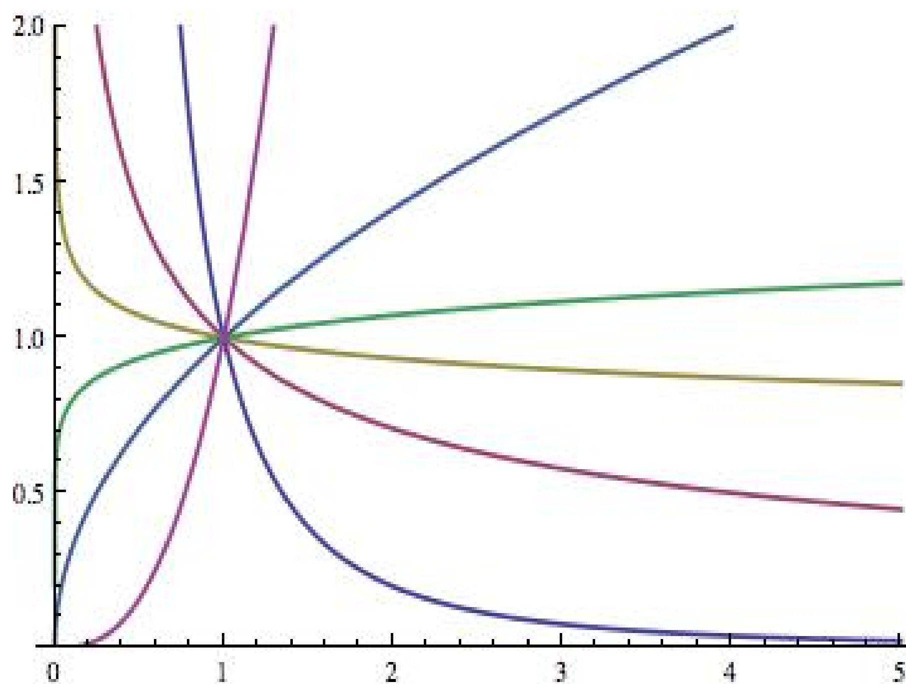


Figure 3.17: $f(x) = x^{-7/3}$, $f(x) = x^{-1/2}$, $f(x) = x^{-1/10}$, $f(x) = x^{1/10}$, $f(x) = x^{1/2}$, $f(x) = x^{8/3}$

Je vous donne en exercice de démontrer les relations suivantes, pour tout $x > 0$ et tout $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} x^0 &= 1 \\ 1^\alpha &= 1 \\ x^{\alpha+\beta} &= x^\alpha\, x^\beta \\ x^{\alpha\beta} &= (x^\alpha)^\beta \\ (e^x)^\alpha &= e^{\alpha x} \\ \ln(x^\alpha) &= \alpha \ln(x) \\ x^\alpha &= e^{\alpha \ln(x)}\,. \end{aligned}$$

C'est cette dernière formule que l'on retient pour définir les puissances quelconques. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto x^\alpha$ est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}\,.$$

Elles vérifient les propriétés suivantes

$$
\begin{aligned}
x^0 &= x\,, \\
1^\alpha &= 1\,, \\
x^a\, y^a &= (xy)^a\,, \\
x^a\, x^\beta &= x^{\alpha+\beta}\,, \\
(x^a)^\beta &= x^{\alpha\beta}\,.
\end{aligned}
$$

3.3.1 Valeur absolue et partie entière

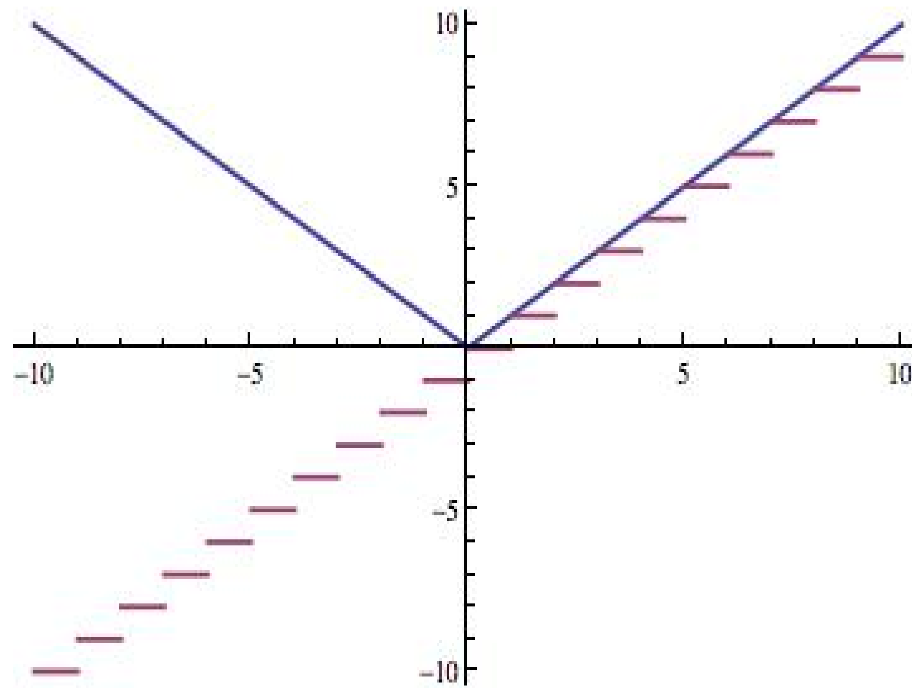


Figure 3.18: $f(x) = |x|$, $f(x) = E[x]$

3.3.2 Fonctions trigonométriques

Les fonctions trigonométriques *cosinus*, *sinus*, *tangente*.

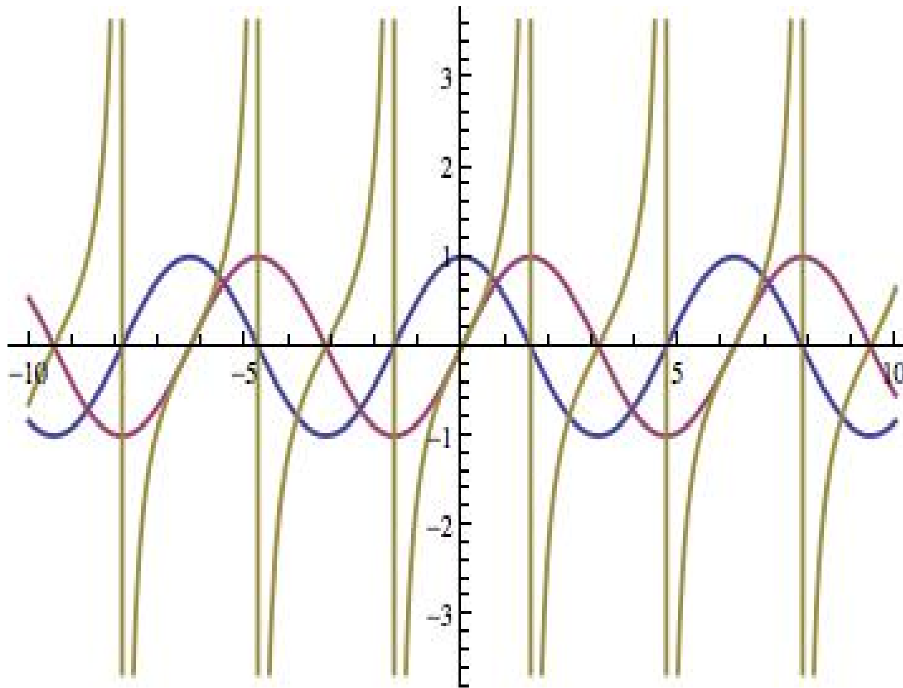


Figure 3.19: $f(x) = \cos(x)$, $f(x) = \sin(x)$, $f(x) = \tan(x)$